

# Zopfgruppen, die Yang-Baxter Gleichung, und Unterfaktoren

---

Gandalf Lechner

Die Yang-Baxter Gleichung ist eine faszinierende Gleichung, die in vielen Gebieten der Physik und Mathematik auftritt und die am besten diagrammatisch dargestellt wird. Dieser Snapshot schlägt einen weiten Bogen vom Zöpfe flechten über die Yang-Baxter Gleichung bis hin zur aktuellen Forschung über Systeme von unendlichdimensionalen Algebren (Unterfaktoren).

## 1 Einleitung

Was haben Eiskristalle, geflochtene Zöpfe, Quantencomputer und von Neumann Algebren gemeinsam? Die Antwort verbirgt sich in einem zu all diesen Themen verbundenen mathematischen Konzept, der sogenannten *Yang-Baxter Gleichung*. Diese Gleichung ist nach Chen Ning Yang und Rodney Baxter benannt, die sie unabhängig voneinander bei ihrer Forschungen in der Quantenmechanik (Teilchenstreuung) bzw. statistischen Physik (Kristalle) entdeckten.

Es erscheint erstaunlich, dass zwei so unterschiedliche Themen auf ein und dieselbe mathematische Gleichung führen sollten. Aber die Yang-Baxter Gleichung und ihre Varianten spielen nicht nur in diesen, sondern in noch vielen weiteren Gebieten eine wichtige Rolle. Einige weitere Beispiele sind die Knotentheorie, bestimmte Modelle der Quantenfeldtheorie, Konfigurationen von Widerständen in einem elektrischen Netzwerk, und Unterfaktoren (gewisse Paare von unendlichdimensionalen Algebren, in denen das Kommutativgesetz

$xy = yx$  maximal verletzt ist). Die Yang-Baxter Gleichung hat sogar die Entstehung einer ganzen Fachrichtung in der Mathematik (Quantengruppen) maßgeblich beeinflusst und wird heutzutage aus verschiedenen ganz unterschiedlichen Gesichtspunkten studiert.

An diesem Punkt wäre es wohl angebracht, diese Yang-Baxter Gleichung einmal hinzuschreiben. Hier ist sie:

Viel mehr, als dass es eine Gleichung für ein in ein Kästchen geschriebenes “ $R$ ” ist, und dass es eine auf eine Art und Weise eine kubische Gleichung ist (drei  $R$ ’s auf jeder Seite der Gleichung), ist hier vorerst nicht zu erkennen. Wie diese Grafik eine präzise mathematische Gleichung kodiert, und wieso die grafische Darstellung viel besser als eine Formel ist, wird im Laufe dieses Snapshots erklärt.

Der Plan ist dabei der Folgende: Zuerst (Abschnitt 2) sprechen wir über Zöpfe und stoßen dabei auf eine interessante mathematische Struktur, die sogenannte Zopfgruppe. In Abschnitt 3 übersetzen wir die abstrakte Zopfgruppe in konkrete Objekte, nämlich (mehrdimensionale) Tabellen. An dieser Stelle taucht die Yang-Baxter Gleichung auf als eine wesentliche Bedingung, um die Übersetzung von Zöpfen in Tabellen widerspruchsfrei zu machen.

Die Lösungen dieser Gleichung sind nur unvollständig verstanden. Im letzten Teil (Abschnitt 4) geht es um die Verbindung zu dem Oberwolfach-Workshop “Subfactors and Applications”, auf dem dieser Snapshot beruht, und wie höhere Mathematik zum Einsatz gebracht werden kann, um die Lösungen der Yang-Baxter Gleichung zu studieren.

## 2 Zopfgruppen

Eine gute Vorbereitung, um die Yang-Baxter Gleichung zu verstehen, ist, sich die Haare zu kämmen. Beim Haare kämmen ist man üblicherweise daran interessiert, die Haare komplett zu entflechten, also ohne irgendwelche Überkreuzungen alle quasi parallel nebeneinander herunterhängen zu lassen, was mit einem ausreichend feinen Kamm und genug Geduld prinzipiell auch immer möglich ist.

Mathematisch gesehen ist Haare kämmen also nicht sehr interessant. Spannender wird es, wenn wir  $n$  Haare (oder Fäden) betrachten, die an ihrem oberen Ende (also quasi am Kopf) aber auch an ihrem unteren Ende fixiert sind, und ohne umzukehren von oben nach unten verlaufen. Dabei können die Fäden auf verschiedenste Weisen verflochten sein; Abbildung (A1) zeigt einige einfache

Beispiele mit  $n = 3$  und  $n = 4$  Fäden statt der üblicherweise  $n \approx 100000$  Haare auf einem Menschenkopf.

(A1)

In diesen Diagrammen deuten die Lücken an den Überkreuzungspunkten an, welcher Faden oben und welcher unten liegt. In leichter Idealisierung stellen wir uns die Fäden dabei als beliebig elastisch und unzerreißbar vor. Wir betrachten zwei Zöpfe als identisch, wenn wir sie durch Einsatz von Fingern und Kamm, also durch Dehnen, Auseinanderfummeln oder Verwickeln (aber nicht Zerschneiden!) ineinander überführen können. In diesem Sinne gelten zum Beispiel die drei Gleichungen

(A2)

Da die Fäden an der Ober- und Unterseite des Diagramms fixiert sind, gibt es aber auch unendlich viele unterschiedliche Zöpfe, die nicht durch Kämmen ineinander transformiert werden können. Wenn viele Fäden oder viele Überkreuzungen involviert sind, ist es nicht mehr leicht zu erkennen, ob ein Zopf glatt gekämmt werden kann wie in der ersten Gleichung in (A2) oder ob dies unmöglich ist. Einen Algorithmus zu finden, der diese Frage entscheidet, ist ein erstes mathematisches Problem mit Zöpfen<sup>[1]</sup>.

Für diese und andere Fragen ist es wichtig, die Eigenschaften der Menge aller Zöpfe mit  $n$  Fäden näher kennenzulernen, die üblicherweise mit  $B_n$  bezeichnet wird ( $B$  für das Englische “braids”). Die reichhaltige mathematische Struktur von  $B_n$  beruht wesentlich darauf, dass zwei Zöpfe  $a, b$ , also zwei beliebige Diagramme mit je  $n$  Fäden, zu einem neuen, kurz  $ab$  genannten Zopf mit ebenfalls  $n$  Fäden, zusammengefügt werden können. Die das Produkt  $ab$  definierende Vorschrift ist, die Unterseite von  $a$  mit der Oberseite von  $b$  zu verkleben und das Ergebnis auf die Länge von  $a$  und  $b$  zusammenzustauchen:

(A3)

Die hier verwendeten Farben und gestrichelten Trennungslinien dienen nur der Veranschaulichung und werden im Folgenden weggelassen.

Wie man an diesem Beispiel sieht, ist die Reihenfolge der Faktoren wichtig, da im Allgemeinen  $ab \neq ba$  gilt. Abgesehen von dieser Verletzung des Kommutativgesetzes gibt es aber einige Analogien zur Multiplikation von Zahlen:

---

<sup>[1]</sup> Dieses Problem ist als “Wortproblem” bekannt. Für eine Lösung siehe zum Beispiel [4].

Analog zu der Zahl 1 gibt es einen speziellen Zopf  $e$  in  $B_n$ , der  $be = eb = b$  für alle Zöpfe  $b \in B_n$  erfüllt:  $e$  besteht aus  $n$  parallelen Fäden ohne irgendwelche Überkreuzungen (wie auf der rechten Seite der ersten Gleichung in (A2)). Weiterhin ist das Produkt von Zöpfen assoziativ, das heißt  $(ab)c = a(bc)$  für alle Zöpfe  $a, b, c$ , und zu jedem Zopf  $b$  gibt es einen inversen, mit  $b^{-1}$  bezeichneten Zopf, der die Eigenschaft hat, dass er  $b$  durch Produktbildung “entknotet”, nämlich  $bb^{-1} = e = b^{-1}b$ . Zum Beispiel:

$$b = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad b^{-1} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad bb^{-1} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} = e \quad (\text{A4})$$

Da eine solche Struktur in der Mathematik als *Gruppe* bezeichnet wird, sprechen wir von der *Zopfgruppe*  $B_n$  von Zöpfen mit  $n$  Fäden.

Zöpfe, die nur einen einzigen Überkreuzungspunkt haben, also zwei nebeneinander liegende Fäden einmal überkreuzen, werden *elementar* genannt. In  $B_n$  gibt es  $2(n-1)$  elementare Zöpfe, die  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  und  $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$  heißen. Nummerieren wir die Fäden von links nach rechts mit  $1, 2, \dots, n$  durch, so legt  $\sigma_k$  Faden  $k$  über Faden  $k+1$  und  $\sigma_k^{-1}$  Faden  $k$  unter Faden  $k+1$ . Zum Beispiel zeigt Abb. (A3)  $a = \sigma_1$ . Durch stetiges Deformieren von Fäden kann man einsehen, dass jeder Zopf in  $B_n$  als Produkt von elementaren Zöpfen geschrieben werden kann. Zum Beispiel

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2. \quad (\text{A5})$$

Die elementaren Zöpfe  $\sigma_k$  eignen sich gut für einen algebraischen Zugang zur Zopfgruppe. Um mit ihnen zu rechnen, muss man nur beachten, dass sie die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\sigma_k \sigma_k^{-1} = e = \sigma_k^{-1} \sigma_k, \quad (\text{Z1})$$

$$\sigma_k \sigma_l = \sigma_l \sigma_k \quad \text{falls } l \neq k \pm 1, \quad (\text{Z2})$$

$$\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}. \quad (\text{Z3})$$

Diese Beziehungen sind grafisch leicht zu verifizieren. In Abb. (A2) sind von links nach rechts die drei Gleichungen  $\sigma_1 \sigma_1^{-1} = e$  (links),  $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1$  (Mitte) und  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$  (rechts) dargestellt.

Die Gleichungen (Z1–3) fassen die gesamte mathematische Struktur von  $B_n$  zusammen: Emil Artin hat schon 1925 gezeigt, dass es außer diesen keine weiteren unabhängigen Relationen in der Zopfgruppe gibt [1]. Das heißt, dass man statt mit Diagrammen genauso gut mit den drei Gleichungen (Z1–3)

arbeiten kann; je nach Fragestellung ist die grafische oder algebraische Sichtweise günstiger.

Die algebraische Sichtweise auf die Zopfgruppe spielt bei einigen Anwendungen eine zentrale Rolle. Da sich die Gleichungen (Z1–3) gut auf einem Computer implementieren lassen, gibt es Kryptographieprotokolle, die auf der Zopfgruppe basieren [6]. Eine andere Anwendung kommt aus der Physik, in der Zopfgruppen in der Beschreibung von Elementarteilchen in niedrigdimensionalen Systemen auftreten. Auch auf rein mathematischer Ebene hält die Zopfgruppe viele unbeantwortete Fragen bereit.

**Quiz 1:**

- Finden Sie die zu den in Abb. (A1) und (A2) gezeigten inversen Zöpfe.
- Finden Sie einen von  $e$  verschiedenen Zopf  $z$  in  $B_3$ , der die Eigenschaft  $zx = xz$  für alle Zöpfe  $x$  in  $B_3$  hat. (Tipp: Finden Sie zuerst einen Zopf  $\delta$ , der  $\delta\sigma_1 = \sigma_2\delta$  und  $\delta\sigma_2 = \sigma_1\delta$  erfüllt. Betrachten Sie dann  $z = \delta\delta$ .)

### 3 Tensordiagramme und die Yang-Baxter-Gleichung

Die Elemente der Zopfgruppe sind recht abstrakt: Genau genommen ist ein Element von  $B_n$  die Menge aller Zopfdiagramme mit  $n$  Fäden, die durch eine Abfolge von den in (A2) beschriebenen Operationen allesamt ineinander überführt werden können. Wir wenden uns jetzt der Frage zu, diese abstrakten Zöpfe als konkrete mathematische Objekte darzustellen. Dabei verwenden wir sogenannte Tensoren, die wir uns als mehrdimensionale Tabellen von Zahlen vorstellen können.

Mehrdimensionale Tabellen? Was soll das heißen? Betrachten wir zuerst eine übliche zweidimensionale quadratische Tabelle  $T$  mit  $d$  Zeilen und  $d$  Spalten (auch  $d \times d$  Matrix genannt):

$$\begin{array}{c} \boxed{T} \\ | \end{array} = T = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & \dots & T_d^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & \dots & T_d^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ T_1^d & T_2^d & \dots & T_d^d \end{pmatrix}$$

Um einen bestimmten Eintrag aus einer solchen Tabelle abzulesen, muss man die Zeilen- und Spaltennummer des Eintrags kennen: Der Eintrag  $T_j^i$  ist die Zahl, die in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  steht. Da es  $d$  Zeilen und Spalten gibt, wobei  $d = 2, 3, \dots$  ein von uns gewählter Parameter ist, können sowohl  $i$  als auch  $j$  unabhängig voneinander die Werte  $1, 2, \dots, d$  annehmen. Die Grafik auf der linken Seite ist ein Tensordiagramm, in dem die obere Linie

von  $T$  den oberen Index (Zeilenindex) und die untere Linie den unteren Index (Spaltenindex) symbolisiert – solche Diagramme werden sich bald als sehr hilfreich herausstellen.

Stellen wir uns nun eine mehrdimensionale Tabelle  $T$  vor, in der Zahlen gespeichert sind, die nicht nur von zwei Parametern  $i$  und  $j$  abhängen, sondern von  $2n$  Parametern  $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n$ , wobei jeder dieser Parameter die Werte  $1, 2, \dots, d$  annehmen kann. Dann können wir die insgesamt  $d^{2n}$  Einträge von  $T$  als  $T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}$  notieren. So eine  $2n$ -dimensionale Tabelle lässt sich nur schlecht auf Papier aufschreiben, passt aber sehr gut zu Tensordiagrammen  mit  $n$  oberen und  $n$  unteren Linien, wobei die oberen Linien den oberen Indizes  $i_1, \dots, i_n$  und die unteren Linien den unteren Indizes  $j_1, \dots, j_n$  von  $T$  entsprechen (jeweils von links nach rechts sortiert). Wir nennen eine solche Tabelle einen Tensor der Größe  $n$ .

Im Folgenden ist es unser Ziel, eine Übersetzungsvorschrift zu definieren, die beliebige Zöpfe  $b$  mit  $n$  Fäden in Tensoren  $T(b)$  der Größe  $n$  übersetzt. Um das zu erreichen, werden wir insbesondere zwei spezielle Tensoren  $R$  und  $R^*$  der Größe 2 benötigen, um Über- und Unterkreuzungspunkte der Zopfdiagramme darzustellen:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} | \\ \boxed{R} \\ | \end{array} \\ \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} | \\ \boxed{R^*} \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \boxed{B} \\ | \end{array} \end{array}$$

Da ein Unterkreuzungspunkt das Spiegelbild eines Überkreuzungspunktes an einer horizontalen Linie ist, sollte das auch für  $R$  und  $R^*$  gelten. Um das zu erreichen, definieren wir  $R^*$  durch Vertauschung der oberen mit den unteren Indizes von  $R$ , nämlich<sup>[2]</sup>  $(R^*)_{a_1 a_2}^{i_1 i_2} = R_{i_1 i_2}^{a_1 a_2}$ . Insbesondere ist  $R^*$  durch  $R$  eindeutig festgelegt.

Die wesentlichen Elemente eines Zopfes sind seine Kreuzungspunkte, die durch horizontales und vertikales Verbinden der Fäden ein Zopfdiagramm definieren. Um ein entsprechendes Tensordiagramm aus  $R$  und  $R^*$  zu erhalten, brauchen wir nun Regeln, um Tensoren sowohl horizontal als auch vertikal zusammenzufügen. Genau das liefert der folgende grafische Kalkül, der auch in der Knotentheorie Anwendung findet [5].

Die **horizontale Komposition** besteht grafisch einfach aus Nebeneinanderschreiben von zwei Tensordiagrammen. Schreiben wir ein Tensordiagramm  $T$  mit  $n$  oberen/unteren Linien (also der Größe  $n$ ) links neben ein Tensordia-

---

[2] Im Allgemeinen können die Einträge unserer Tensoren auch *komplexe* Zahlen sein. In diesem Fall ist die Definition von  $R^*$  um eine komplexe Konjugation aller Einträge zu ergänzen.



$TS \neq ST$ . Man prüft leicht nach, dass  $AI = A = IA$  für alle Matrizen  $A$  gilt, was die grafische Notation für  $I$  (leerer Faden ohne Box) rechtfertigt.

Dies beendet unsere Definition der Darstellung  $b \mapsto T_R(b)$  von Zöpfen in  $B_n$  durch Tensoren  $T_R(b)$  der Größe  $n$ . Die Bezeichnung  $T_R$  deutet hier an, dass die Abbildung  $b \mapsto T_R(b)$  ganz wesentlich von der Wahl von  $R$  abhängt. Sobald  $R$  festgelegt ist, können wir jeden Zopf in  $B_n$  (mit einer beliebigen Anzahl  $n$  von Fäden) als einen Tensor der Größe  $n$  auffassen. Als ein Beispiel betrachten wir den Zopf  $b$  aus Abb. (A4):

$$b = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{R} \\ \boxed{R^*} \end{array} = (R \otimes I)(I \otimes R^*) = T_R(b)$$

Alle  $d^6$  Einträge von  $T_R(b)$  lassen sich durch die beschriebenen Kompositionsregeln und die Einträge von  $R$  berechnen. Um zu prüfen, dass Sie diese Regeln verinnerlicht haben, können Sie in diesem Beispiel nachrechnen, dass (für  $d = 3$ )

$$T_R(b)_{211}^{123} = R_{21}^{12} R_{13}^{11} + R_{22}^{12} R_{23}^{11} + R_{23}^{12} R_{33}^{11}$$

gilt.

Wir müssen allerdings als einen ganz entscheidenden Punkt noch sicherstellen, dass diese Abbildung von Zöpfen zu Tensoren widerspruchsfrei ist. Das ist nicht selbstverständlich, da ein gegebener Zopf durch Verschieben/Verbiegen der Fäden in unterschiedlich aussehende Formen gebracht werden kann, die aber den gleichen Zopf darstellen. Jede solche Deformation lässt sich auf die drei Fälle zurückführen, die in Abb. (A2) grafisch und in (Z1–3) in Formeln festgehalten sind. Wir müssen also sicherstellen, dass in diesen drei Fällen die jeweilige linke und rechte Seite der Gleichung dem selben Tensor entsprechen.

Es stellt sich heraus, dass die zweite Gleichung (Abb. (A2) Mitte bzw. (Z2)) nach unseren Regeln von horizontaler und vertikaler Komposition automatisch erfüllt ist, also überhaupt keine Bedingungen an  $R$  stellt. Die erste und dritte Gleichung (links bzw. rechts in Abb. (A2)) nehmen für Tensordiagramme die folgende Form an:

$$\begin{array}{c} \boxed{R} \\ \boxed{R^*} \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boxed{R} \\ \boxed{R} \\ \boxed{R} \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{R} \\ \boxed{R} \\ \boxed{R} \end{array} \qquad (X)$$

Diese beiden diagrammatischen Gleichungen (X) entsprechen zwei konkreten Anforderungen an  $R$ . Die erste Gleichung stellt eine Bedingung an  $R$ , die *Unitarität* genannt wird und von sehr vielen Tensoren erfüllt ist. Die zweite

Gleichung ist hingegen eine komplizierte Bedingung an  $R$  – es ist die anfangs erwähnte *Yang-Baxter Gleichung*, die wir nun endlich als eine Gleichung für Tensoren der Größe 2 exakt verstehen können. Wir bezeichnen die Lösungen  $R$  der beiden Gleichungen (X) als “R-Matrizen”.

Um die Komplexität der Yang-Baxter Gleichung zu verstehen, sollte man sich klarmachen, dass dies ein System von  $d^6$  gekoppelten kubischen Gleichungen (die linke und rechte Seite der Gleichung sind jeweils Tensoren der Größe 3) für  $d^4$  Unbekannte ist (die Einträge des Tensors  $R$  der Größe 2). Im einfachsten Fall  $d = 2$  sind das also 64 Gleichungen für 16 Unbekannte. Es ist nicht sehr erhellend, diese Gleichungen alle explizit aufzuschreiben, die diagrammatische Form ist viel klarer.

Ein Beispiel einer Lösung mit  $d = 2$  ist

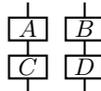
$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}(I \otimes I + A \otimes B), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnet  $\otimes$  die oben definierte horizontale Komposition und  $I$  die  $(2 \times 2)$  Einheitsmatrix. Die Summe von Tensoren ist eintragsweise definiert, und der Vorfaktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  multipliziert alle Einträge des Tensors. Durch explizite Rechnung kann man verifizieren, dass dies tatsächlich eine R-Matrix ist.

Für  $d = 2$  sind alle Lösungen von (X) bekannt. Aber schon für  $d = 3$ , geschweige denn für allgemeines  $d$ , ist dies nicht mehr der Fall.

### Quiz 2:

- Betrachten Sie für vier beliebige Tensoren  $A, B, C, D$  der Größe 1 (also  $(d \times d)$  Matrizen) das quadratische Diagramm



Zeigen Sie, dass es keine Rolle spielt, ob zuerst die nebeneinander stehenden Matrizen horizontal und danach mit denen unter ihnen vertikal komponiert werden, oder ob zuerst die untereinander stehenden Matrizen vertikal und danach mit denen neben ihnen stehenden horizontal komponiert werden.

- Definieren sie einen Tensor  $R$  der Größe zwei wie folgt:  $R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = 1$  falls  $i_1 = j_2$  und  $i_2 = j_1$ , und  $R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = 0$  in allen anderen Fällen. Prüfen Sie dann, dass  $R$  eine R-Matrix ist (also beide Gleichungen in (X) löst).

## 4 Von R-Matrizen zu Unterfaktoren und zurück

Die Yang-Baxter Gleichung inspiriert nach wie vor Mathematiker, neue Methoden zu erfinden, um etwas über ihre Lösungen zu lernen. Einerseits gibt es

recht konkrete Motivation wie etwa mögliche Anwendungen von R-Matrizen zur Modellierung von logischen Gates auf einem Quantencomputer, andererseits gibt es grundlegendes mathematisches Interesse an der Struktur der Lösungsmenge. Das Faszinierende an dieser Gleichung ist nicht nur, dass sie in so vielen unterschiedlichen Gebieten eine Rolle spielt, sondern auch, dass sie sehr unterschiedliche Herangehensweisen zulässt. Zum Beispiel gibt es Methoden, die auf Ideen aus der Quantisierung (Übergang von einem System der klassischen Mechanik zu einem System der Quantenmechanik) beruhen, oder abstrakte algebraische Methoden. In diesem letzten Abschnitt möchte ich umreißen, wie man sich den Lösungen der Yang-Baxter Gleichung auch mit einem Umweg über unendlichdimensionale Analysis nähern kann.

Fassen wir zusammen, wo wir nach dem in Abschnitt 2 und 3 Gesagtem stehen: Es gibt bestimmte Tensoren der Größe 2, die R-Matrizen genannt werden. Die Bedingung, eine R-Matrix zu sein, ist kompliziert (Yang-Baxter Gleichung). Wir kennen einige Beispiele, aber haben keinen guten Überblick über die Menge aller R-Matrizen. Doch wir wissen, dass jede R-Matrix  $R$  eine Darstellung von Zöpfen  $b$  mit  $n$  Fäden durch Tensoren  $T_R(b)$  der Größe  $n$  definiert. Diese Tensoren lassen sich untereinander (vertikal) multiplizieren, aber auch addieren, indem man sie Eintrag für Eintrag addiert. Es macht also Sinn, über Polynome in den  $T_R(b)$  zu sprechen. Diese bilden die Algebra

$$\mathcal{N}_{R,n} = \{ \text{Alle Polynome in } T_R(b) \text{ für beliebige Zöpfe } b \text{ mit } n \text{ Fäden} \}.$$

Dies ist eine endlichdimensionale Algebra, in der das Kommutativgesetz nicht gilt, wie bereits im Zusammenhang mit dem vertikalen Produkt erwähnt. Aber die zweite in Quiz 1 beschriebene Aufgabe besagt auch, dass es in  $\mathcal{N}_{R,n}$  noch viele Elemente  $Z$  gibt, die  $ZT = TZ$  für alle  $T \in \mathcal{N}(R)_n$  erfüllen. In diesem Sinne ist  $\mathcal{N}_{R,n}$  nicht komplett nicht-kommutativ.

Das ändert sich, wenn man den Limes  $n \rightarrow \infty$  ausführt. Wie so ein Grenzwert zu verstehen ist, kann in diesem kurzen Artikel nicht genau erklärt werden. Aber zwei wesentliche Bestandteile sind, dass man von Zöpfen mit endlich vielen Fäden zu Zöpfen mit unendlich vielen Fäden übergeht, und das man eine nun unendlichdimensionale Algebra  $\mathcal{N}_R$  als Limesalgebra erhält. Diese Algebra enthält eine Identität  $\mathbf{I}$ , die zu dem Zopf mit unendlich vielen Fäden ohne irgendwelche Überkreuzungen gehört, und ist "extrem nicht-kommutativ" in dem Sinne, das einzig und allein Vielfache von  $Z = \mathbf{I}$  die Eigenschaft haben, dass  $ZT = TZ$  für alle  $T \in \mathcal{N}_R$  erfüllen. Da  $\mathcal{N}_R$  auch die richtigen analytischen Eigenschaften hat, spricht man von einem *Faktor* – eine Sorte Algebra, die von John von Neumann ausgehend von seinen fundamentalen Arbeiten über die mathematischen Grundlagen der Quantenphysik definiert wurde.

Zusammen mit Francis Murray zeigte von Neumann, dass es drei grobe Typen von Faktoren gibt, genannt Typ I, II, und III. Später verfeinerte Alain

Connes diese Klassifikation. Auf Grundlage dieser Resultate kann man zeigen, dass der Faktor  $\mathcal{N}_R$  keinerlei interessante Information über  $R$  enthält; unabhängig von  $R$  erhält man immer die gleiche Algebra  $\mathcal{N}_R$ , die im Fachjargon hyperfiniten Faktor vom Typ  $\text{II}_1$  heißt. Diese ernüchternde Nachricht scheint die ganze Herangehensweise mit unendlichdimensionalen Algebren in Frage zu stellen, kann aber behoben werden: Wenn man nicht nur den Faktor  $\mathcal{N}_R$  allein, sondern auch noch einen kleineren in ihm enthaltenen Faktor  $\mathcal{N}_R^<$  betrachtet<sup>[3]</sup>, erhält man einen sogenannten Unterfaktor  $\mathcal{N}_R^< \subset \mathcal{N}_R$ , also eine Inklusion von zwei Faktoren. Diese weitaus komplexere Struktur enthält viel relevante Information über  $R$  und die entsprechenden mathematischen Werkzeuge, um diese Information zu extrahieren.

Unterfaktoren werden seit Vaughan Jones' Entdeckung [2], dass es eine numerische Invariante gibt, die die relative Größe des kleineren Faktors in dem größeren Faktor misst, intensiv studiert<sup>[4]</sup>. Auch die Konferenz, auf der dieser Snapshot beruht, war diesem Thema gewidmet.

Mit diesen und anderen Methoden kann man die Menge aller  $R$ -Matrizen studieren und trotz des erstaunlichen Umwegs von einem endlichen Tensor  $R$  über eine Inklusion von zwei unendlichdimensionalen Algebren konkrete Informationen über die Lösungen der Yang-Baxter Gleichung erhalten. In einem speziellen Fall hat dies bereits zu einer vollständigen Klassifikation geführt [7], aber im Allgemeinen bleibt viel zu tun!

## Image credits

Alle Grafiken wurden vom Autor mit Hilfe der TikZ Bibliothek knots für diesen Snapshot hergestellt.

## References

- [1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **4** (1925), 47–72.
- [2] V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), no. 1, 1–25.

---

<sup>[3]</sup> Der kleinere Faktor ist dabei mit der gleichen Idee definiert, die Hilberts Hotel [8] zugrunde liegt: In der Zopfgruppe mit unendlich vielen Fäden schiebt man alle Zöpfe um einen Faden nach rechts. Die sich so ergebenen Zöpfe verflechten den ersten Faden nicht und führen zu dem kleineren Faktor  $\mathcal{N}_R^<$ .

<sup>[4]</sup> Interessanterweise gibt es auch einen Weg von Unterfaktoren zurück zu Zopfgruppen: Jones' Arbeiten zu Unterfaktoren führten zu überraschenden Einsichten in Darstellungen der Zopfgruppe und dem berühmten Jones-Polynom der Knotentheorie [3].

- [3] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. Math. **126** (1987), 335–388.
- [4] C. Kassel and V. Turaev, *Braid Groups*, Springer, 2008.
- [5] L. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific, 1993.
- [6] K. H. Ko, S. J. Lee, J. H. Cheon, J. W. Han, J. sung Kang, and C. Park, *New Public-Key Cryptosystem using Braid Groups*, Advances in Cryptology – CRYPTO 2000 (Mihir Bellare, ed.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 1880, Springer, 2000, p. 166–183.
- [7] G. Lechner, U. Pennig, and S. Wood, *Yang-Baxter representations of the infinite symmetric group*, Adv. Math. (2019), 106769.
- [8] Wikipedia, *Hilberts Hotel*, 2014, [https://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts\\_Hotel](https://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts_Hotel), visited on February 5, 2020.

Gandalf Lechner *ist Senior Lecturer an  
der Universität von Cardiff, Wales.*

*Mathematical subjects*  
will be filled out by the editors

*Connections to other fields*  
will be filled out by the editors

*License*  
will be filled out by the editors

*DOI*  
will be filled out by the editors

---

*Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach* provide exciting insights into current mathematical research. They are written by participants in the scientific program of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO). The snapshot project is designed to promote the understanding and appreciation of modern mathematics and mathematical research in the interested public worldwide. All snapshots are published in cooperation with the IMAGINARY platform and can be found on [www.imaginary.org/snapshots](http://www.imaginary.org/snapshots) and on [www.mfo.de/snapshots](http://www.mfo.de/snapshots).

ISSN 2626-1995

---

*Junior Editor*  
will be filled out by the editors  
[junior-editors@mfo.de](mailto:junior-editors@mfo.de)

*Senior Editor*  
Carla Cederbaum  
[senior-editor@mfo.de](mailto:senior-editor@mfo.de)

Mathematisches Forschungsinstitut  
Oberwolfach gGmbH  
Schwarzwaldstr. 9–11  
77709 Oberwolfach  
Germany

*Director*  
Gerhard Huisken



Mathematisches  
Forschungsinstitut  
Oberwolfach



**IMAGINARY**  
open mathematics